ALGUNAS DEFINICIONES E IDEAS EN LA TRIGONOMETRÍA ESFÉRICA APLICABLES EN LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA

Soto Hernández Yancel Orlando
yancelk@hotmail.es
Universidad Distrital Francisco José de Caldas (Bogotá-Colombia)

Tema: Pensamiento geométrico
Modalidad: Póster (P)
Nivel educativo: No específico
Palabras clave: Trigonometría esférica, Teorema del seno y coseno, Resolución de problemas, Modelo de Van Hiele, Estándares en matemáticas.

Resumen

En el presente trabajo se intentarán exponer algunas definiciones e ideas acerca de la trigonometría esférica que van encaminadas a reflexionar sobre las aplicaciones que son poco reconocidas en el campo de la enseñanza de la geometría.
Por otro lado, se expondrán algunas construcciones que se trabajaron en el espacio de formación Seminario de problemas que hace parte de la Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas (Bogotá) que permitieron recapacitar sobre el posible trabajo que se puede desempeñar en relación a la enseñanza de la geometría a partir de lo propuesto por el modelo de Van Hiele en los niveles y habilidades en geometría y los Estándares Curriculares en Colombia en el área de matemáticas.

Algunas consideraciones generales de la esfera

Para empezar, se asume que la circunferencia se define analíticamente de la forma:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

Siendo A de coordenada (a, b) y B de coordenadas (x, y), ver figura 1.

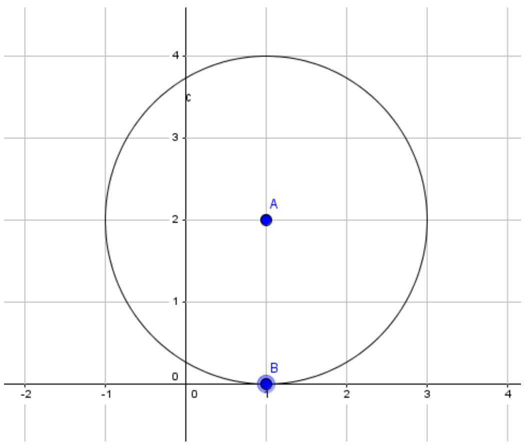


Figura 1: Constitución de la circunferencia en su forma geométrica

Pero tenemos que si el espacio trabajado cambia, la ecuación de la circunferencia se definirá en otros términos. Desde lo planteado por Chinea (2002), la esfera está definida en un dominio R^3 que analíticamente es de la forma:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$$

Se define de esta manera puesto que estamos trabajando en un espacio totalmente diferente, además se tiene que la coordenada del centro tiene un cambio en torno al punto c, porque las coordenadas están dadas de acuerdo a $x, y, z.$

En términos del espacio geométrico trabajado bajo las coordenadas, la esfera se verá reflejada en la figura 2.

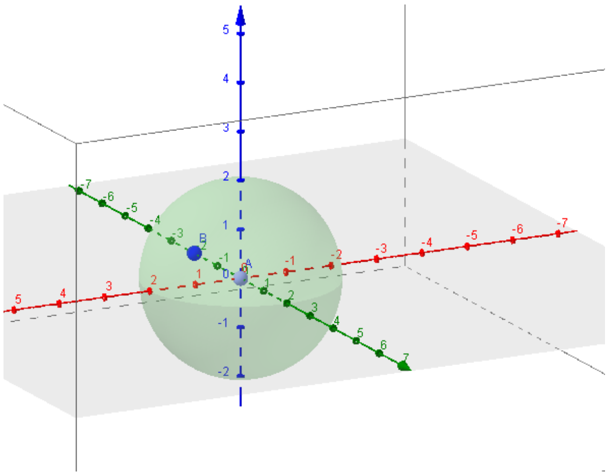


Figura 2: Constitución de la circunferencia en su forma geométrica dada en R^3

En síntesis, se puede definir la esfera como la revolución de la circunferencia que tiene un centro a, b y c ; y que además cumple con la forma descrita anteriormente.

Respecto a las definiciones

El espacio no euclidiano que se trabajará será el de la esfera y por ende las propiedades de los elementos geométricos cambian, en este sentido la percepción de las definiciones y conceptos está expuesta a ser diferente; a continuación se presentarán algunas de esas definiciones en el campo de la trigonometría esférica.

Arco: Segmento delimitado por 2 puntos pertenecientes a una circunferencia máxima.

Se puede observar que los segmentos están definidos en relación a arcos de circunferencia que se pueden construir en la esfera pero estos deben cumplir la condición de ser circunferencia máxima, entonces ¿qué es una circunferencia máxima?

Circunferencia máxima: Es también llamada ciclo, es la intersección de la esfera con un plano, el cual pasa por el centro de la misma. Ver figura 3.

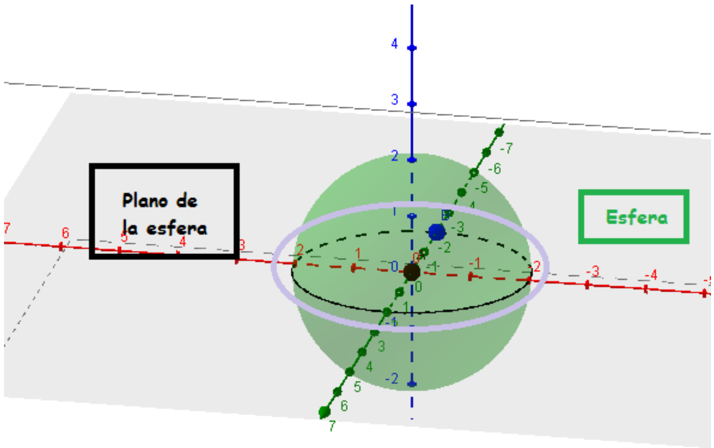


Figura 3: Intersección entre el plano (gris) y la esfera que generan una circunferencia máxima (ver lo morado) que pasa por el centro y por un punto de la esfera.

Circunferencia mínima: Es la intersección de la esfera con un plano que NO pasa por el centro (ver en la figura 4 lo verde).

Distancia esférica: Longitud de arco entre dos puntos A y B (ver lo azul en la figura 4).

Polos: Son los diámetros que son perpendiculares a un plano trazado en el centro (ver lo amarillo en la figura 4).

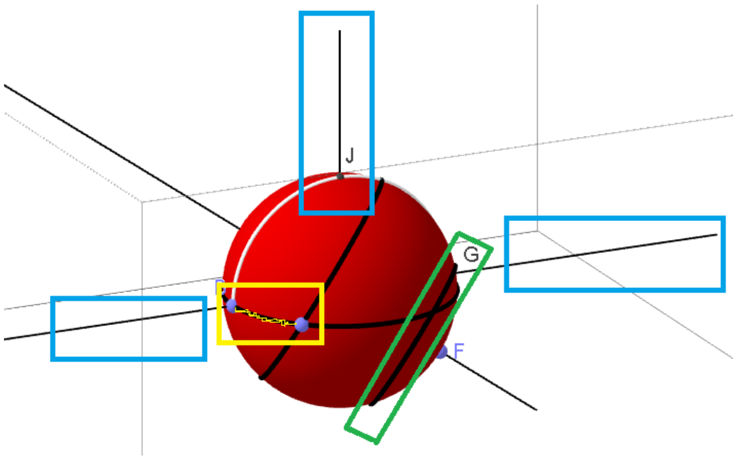
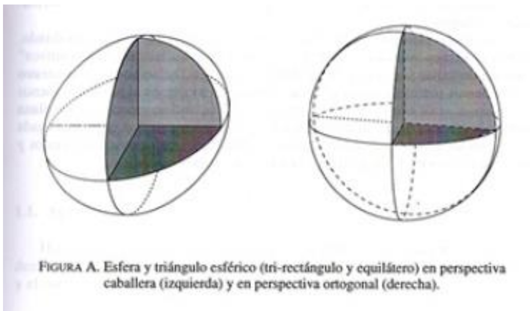
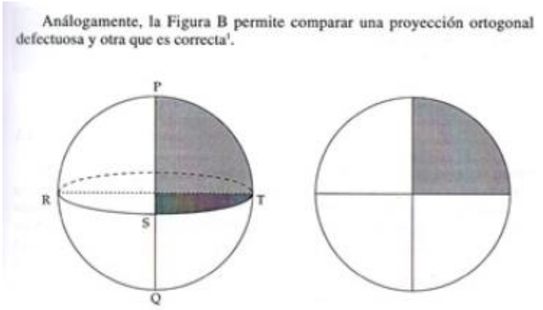


Figura 4: Algunas partes de la esfera como la distancia, los polos y las circunferencias denotadas con colores.

Elementos como la recta y el segmento están definidos en términos del arco y la distancia esférica; además dentro de este tipo de geometría se consideran medidas angulares, por lo que el trabajo que se desarrolla se justifica bajo la utilización de la trigonometría.





Fotografias tomadas del libro Baena, J; Coriat, M; Marín, A & Martínez, P. (SF). La esfera, en el que se muestran diedros y triedros para la conformación de tipo de triángulos.

A partir de los elementos mencionados y otros como *ángulo esférico* (que se conforma a partir de rectas tangentes en un punto de la esfera) y *triedro,* se consideran figuras haciendo énfasis en los triángulos como por ejemplo: el equilátero, el isósceles, el rectángulo, el birrectángulo, el escaleno, entre otros; que permiten pensar en la construcción de otro tipo de figuras diferentes a las observadas en la geometría euclidiana que pueden ser también clasificadas (ver figura 5) y en la NO construcción de otras figuras como el cuadrado y el rectángulo en la geometría sobre la esfera.

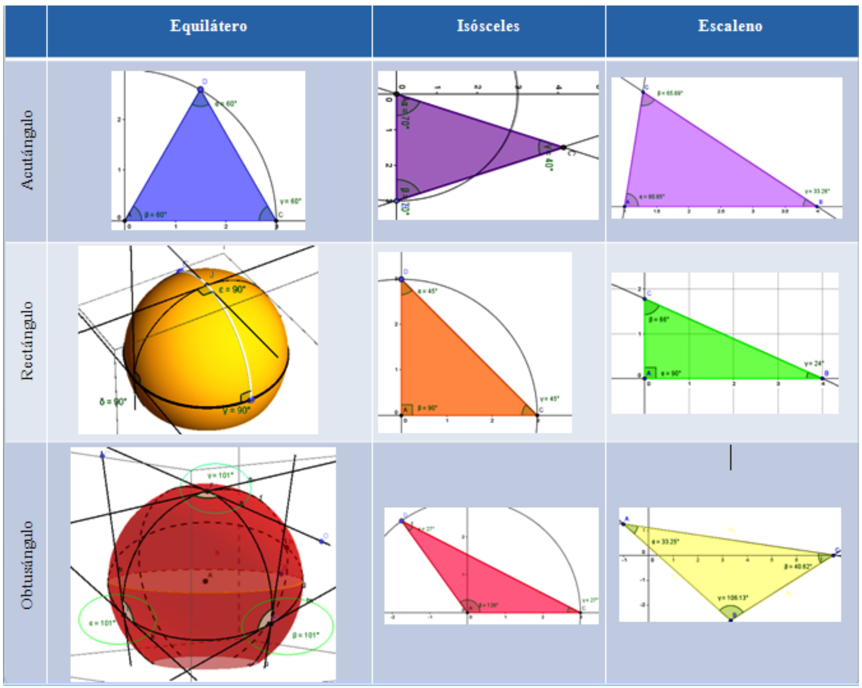


Figura 5: Clasificación de los triángulos en geometría esférica que amplía la mostrada en geometría euclidiana.

ISSN 1688-9886

Algunas construcciones y discusiones generadas en el espacio académico Seminario de Problemas

Las discusiones generadas en el espacio de formación Seminario de Problemas se empezaron a generar de acuerdo a la situación inicial que se planteó, en aquella situación se le expedía por grupos a los estudiantes intentar demostrar el teorema de Pitágoras en el espacio esférico. Para la gran mayoría de estudiantes el problema fue complicado porque la geometría que se trabajaría no era la usual y el tipo de demostración que se tenía que realizar iba encaminada al conocimiento de otros axiomas, postulados y nociones diferentes a las del campo euclidiano. En este sentido los estudiantes intentaron abordar la problemática desde los siguientes aspectos:

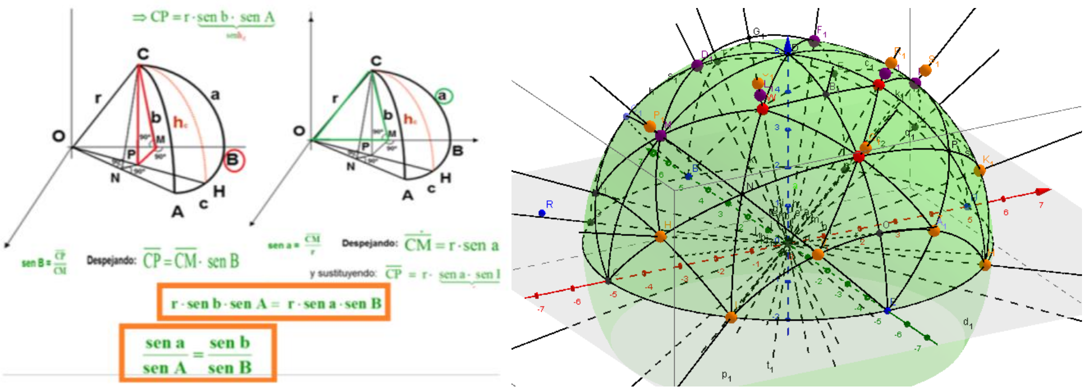
- Construcciones de tipo dinámico a través de Software como GeoGebra 3D (ver imagen 2).
- Utilización de proyecciones en la esfera que permitirían utilizar algunas relaciones como:

$$sen(x) = \frac{co}{k}$$

$$cos(x) = \frac{CA}{k}$$

$$tan(x) = \frac{co}{k}$$

Estas relaciones trigonométricas se empiezan a utilizar cuando se identifican propiedades de los arcos y los ángulos para medir en términos de una sola cosa, ángulos.



Imágenes 1-2: Ejemplo gráfico-geométrico y simbólico-analítico de las posibles proyecciones que se pueden generar en la esfera para trabajar con elementos como las rectas y construcción de hexágonos de uno de los estudiantes del espacio de formación Seminario de Problemas.

En relación a los estándares y los niveles-habilidades de Van Hiele

Para el desarrollo de la relación entre estándares y niveles-habilidades; se toman específicamente 2 estándares entre los cuales se contempla uno de pensamiento métrico y uno de pensamiento geométrico (MEN, 2003) y 3 niveles y habilidades de Van Hiele (Citados por Vargas, G & Gamboa, R. (2013)) en los que se pueden estudiar aspectos puntuales de la esfera; los estándares mencionados y niveles concebidos se organizan en la siguiente tabla.

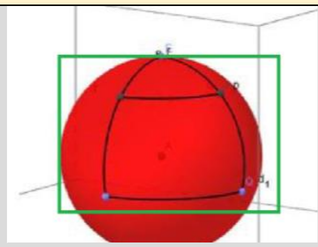
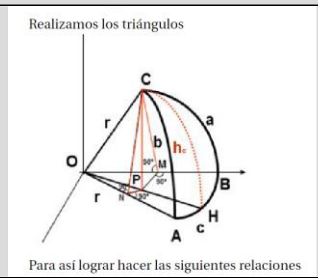
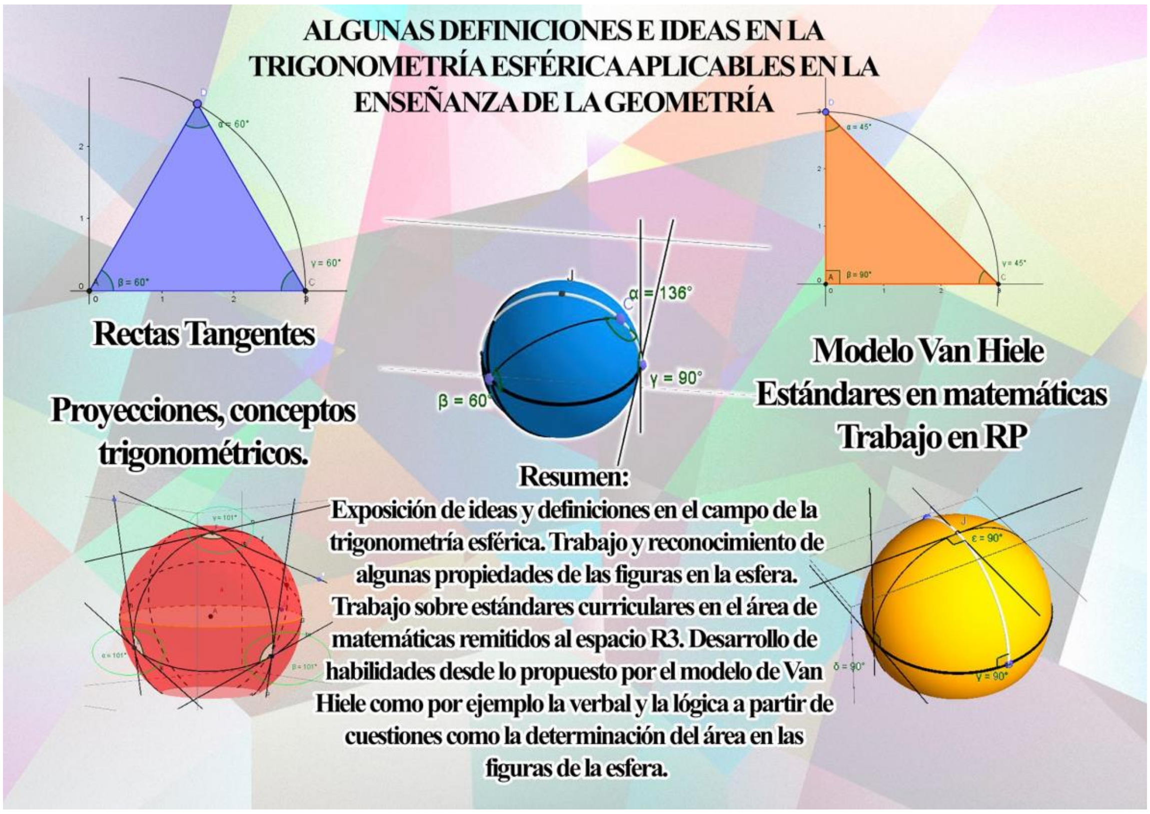
Estándares / **Niveles**	**Estándar 1**	**Estándar 2**	**Relación-aplicación con la esfera**
	Generalizo procesos de cálculos válidos para encontrar el área y volumen de sólidos.	• **Calculo áreas y volúmenes a través de la composición de sólidos.** • **Resuelvo y formulo problemas utilizando modelos geométricos.**	
Nivel de rigor ***Habilidad verbal***	El nivel de rigor de Van Hiele interpretado por Galindo (1996) hace referencia a la utilización de sistemas deductivos formales para demostrar fenómenos geométricos, en relación a la habilidad verbal se espera una utilización apropiada del lenguaje geométrico. Mirando el estándar propuesto y el nivel-habilidad se esperaría por ejemplo que el estudiante a través de los elementos geométricos demuestre por ejemplo porque no es posible construir rectángulos en la esfera.	En estos dos estándares, el nivel de rigor estará implicado en menor medida porque se espera que se utilice un poco más el modelo geométrico y se realicen cálculos para hablar de por qué no es posible por ejemplo construir rectángulos, en la aplicación de la esfera se observa que el estudiante emplea el software para hablar de la imposibilidad.	 Abordaje de uno de los estudiantes del espacio en donde logra mostrar que es posible construir el polígono de 4 lados pero con circunferencias menores.
Nivel de rigor ***Habilidad lógica***	Respecto a la habilidad lógica propuesta por Van Hiele, Galindo (1996) la interpreta como la manera de generar argumentos de acuerdo a axiomas y teoremas formales; para el caso, y en relación al estándar, se espera que el estudiante hable de diferencias, similitudes y propiedades de los elementos de la esfera para decir por ejemplo que no es posible construir rectángulos sobre la esfera.	A través del cálculo de áreas y volúmenes en la esfera, el estudiante podría empezar a caracterizar las figuras que son construibles en el espacio de la esfera, además podría a través de fórmulas como el volumen de la esfera inferir relaciones y modelos.	En la geometría esférica se niega el 5 postulado propuesto por Euclides en el libro 1, en ese sentido se habla de que en este tipo de geometría no existen rectas paralelas, el estudiante a través de la construcción podría conjeturar que como no existen rectas paralelas, no sería posible construir cuadriláteros porque en la geometría plana se caracterizan por tener pares de lados que sean paralelos.
Nivel de deducción ***Habilidad aplicada***	La habilidad aplicada es entendida como una habilidad de modelación que en términos de Galindo (1996) es interpretada como la capacidad de explicar fenómenos reales a través del objeto matemático, en términos del estándar, el estudiante podría generalizar procesos de cálculo de volúmenes y áreas para hablar por ejemplo cómo se pueden realizar proyecciones.	Como lo enuncia el estándar, se hace uso del modelo geométrico para intentar hablar de un fenómeno conocido, familiar o cercano al estudiante, para el caso de la imagen, uno de los estudiantes del espacio de formación Seminario de problemas toma el modelo esférico y a través de proyecciones intenta poner el problema del teorema de Pitágoras en términos más comunes.	

Tabla 1: Relación establecida entre los estándares tomados con los niveles-habilidades de Van Hiele para determinar aplicaciones a la enseñanza de aspectos de la trigonometría esférica.

Aspecto del Póster



Referencias bibliográficas

Baena, J; Coriat, M; Marín, A & Martínez, P. (SF). *La esfera. Educación matemática en secundaria.* Madrid, España.

Chinea, C. (2002). *Las fórmulas de la trigonometría esférica.* Marchena: Diciembre de 2002.

Galindo, C. (1996). *Desarrollo de habilidades básicas para la comprensión de la geometría*. Revista EMA, 1996, Vol. 2; pág. 49-58.

Ministerio de Educación Nacional, MEN; (2003). *Lineamientos y estándares básicos en el área de matemáticas*. Un reto escolar. Proceso de formulación y participación en Colombia.

Vargas, G & Gamboa, R. (2013). *El modelo de Van Hiele y la enseñanza de la Geometría*: *un enfoque Uniciencia*, Vol. 27, # 1; Universidad Nacional de Costa Rica.